EX 16 :

1) $f(x)=\dfrac{2+\cos x}{x}$

$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 1\le 2+\cos x\le 3$

• pour x>0 : $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{2+\cos x}{x}\le\dfrac{3}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• pour x<0 : $\dfrac{3}{x}\le\dfrac{2+\cos x}{x}\le\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{3}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

2) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$ $\quad x\neq 0$

$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow 0\le 1+\cos x\le 2$

$\Rightarrow 0\le f(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

3) $f(x)=\dfrac{x.\sin x}{x^4+x^2+1}$

$|f(x)|=\dfrac{|x|.|\sin x|}{x^4+x^2+1}$

on a : $|\sin x|\le 1\Rightarrow |x|.|\sin x|\le|x|$

$\Rightarrow|f(x)|\le\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^4+x^2+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^3}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

4) $f(x)=\cos x-x$

$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -x-1\le f(x)\le 1-x$

* $\begin{cases} f(x)\le 1-x \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

* $\begin{cases} f(x)\ge -1-x \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-1-x)=+\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

EX 17 :

1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ $\quad x\ge 1$

* $|f(x)|\le\dfrac{1+|\cos x|}{\sqrt{x}}\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ car $|\cos x|\le 1$

* $|g(x)|=\dfrac{x.\sin^4 x}{2x^3+1}$ $\quad car\ \ x\ge 1$

$2x^3+1\ge 2x^3\Rightarrow\dfrac{1}{2x^3+1}\le\dfrac{1}{2x^3}$

$\Rightarrow|g(x)|\le\dfrac{\sin^4 x}{2x^3}\Rightarrow|g(x)|\le\dfrac{1}{2x^2}$ car $\sin^4 x\le 1$

*$\sin x\le 1\Rightarrow 3\sin x\le 3\Rightarrow -x^3+3\sin x\le -x^3+3$

$\Rightarrow h(x)\le -x^3+3$

2) pour $x\ge 1$

* $|f(x)|\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

* $|g(x)|\le\dfrac{1}{2x^2}$ pour $x\ge 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

* pour $x\ge 1$, $h(x)\le -x^3+3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3)=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$

EX 18 :

$f(x)=\dfrac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}$; $x\in\mathbb{R}^*$

1) a) pour x>0

$\sin(\frac{1}{x})\le 1\Rightarrow -\sin(\frac{1}{x})\ge -1\Rightarrow 2-\sin(\frac{1}{x})\ge 1$

$\Rightarrow\dfrac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}\ge\dfrac{1}{x}$ (car x>0) $\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{1}{x}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn